## درس اوّل: معرفی و ساده کردن عبارت‌های گویا

**مسئله**

طول مستطیلی ۴ سانتی‌متر از عرض آن بیشتر است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل $\frac{۲}{۳}$ باشد، طول و عرض آن را به‌دست آورید.

اگر x را عرض مستطیل درنظر بگیریم، طول آن x+۴ است و نسبت عرض به طول را می‌توان با $\frac{x}{x+۴}$ نمایش داد؛ بنابراین :

$$\frac{x}{x+۴}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳x = ۲x+۸ \Rightarrow x=۸ \text{ عرض} \quad \text{طول}=۱۲$$

عبارت $\frac{x}{x+۴}$ را، که نسبت دو چندجمله‌ای است، عبارت گویا می‌نامیم.

به‌طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشد.

از عبارت‌های گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر استفاده می‌شود؛ به‌طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت $v_۱$ طی کرده و سپس از همان مسیر با سرعت $v_۲$ بازگشته است، از رابطهٔ $\frac{۲v_۱v_۲}{v_۱+v_۲}$ به‌دست می‌آید که عبارت گویای جبری است. برخی از مثال‌های دیگر از این قرار است :

محاسبهٔ جرم یک جسم با سرعت v و انرژی جنبشی k $\frac{۲k}{v^۲}$

میانگین حسابی دو عدد a و b $\frac{a+b}{۲}$

با توجه به تعریف بالا عبارت‌های زیر گویا هستند :

$$\frac{x^۲-\sqrt{۳}x+۱}{۹xy} \text{ و } \frac{x}{y} \text{ و } \frac{x-۳}{۴} \text{ و } \frac{۲}{۵} \text{ و } \frac{-a}{۴} \text{ و } \frac{x+۵}{x-۱} \text{ و } \frac{۲x-۵}{۵x^۳-۲x^۲+۱}$$

$$x^۳+۲x-۷ \text{ و } \frac{-a}{b} \text{ و } \frac{x^۳}{۱} \text{ و } \frac{xy^۲}{(x-y)^۲} \text{ و } \frac{۳x+\sqrt{۷}}{x^۲} \text{ و } \frac{۱۰}{x+۲} \text{ و } \frac{۱}{x}$$

امّا عبارت‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\sqrt{xy} \text{ و } \frac{\sqrt{x}}{x+y} \text{ و } |x-y| \text{ و } \frac{۱}{\sqrt{x-۲}}$$

## کار در کلاس

کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویاست؟ چرا؟

$$\frac{۷}{x-۱} \quad و \quad \frac{x+۶}{۳} \quad و \quad \frac{ah}{۲} \quad و \quad \frac{\sqrt{۳}+x}{۵} \quad و \quad \frac{\sqrt{۲x}}{۲۵} \quad و \quad \frac{|x|+|y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y}+۱}{x^۲} \quad و \quad \frac{x-۵}{\sqrt{۳}+۱} \quad و \quad \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} \quad و \quad \frac{mn+n^۲}{۵-n} \quad و \quad ۱۴ \quad و \quad \frac{۳-a}{۲+x}$$

## فعالیت

مقدار عددی عبارت $\frac{x+۵}{x-۳}$ را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به‌دست آورید :

| x | −۲ | ۷ | $\frac{۱}{۲}$ | ۰ | −۱ | −۵ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x+۵}{x-۳}$ | | | | | | |

به ازای x=۳ مخرج عبارت گویای $\frac{x+۵}{x-۳}$ مساوی صفر می‌شود و همان‌گونه که از قبل می‌دانید، $\frac{۸}{۰}$ به عنوان عدد تعریف نمی‌شود.

برای تعیین همه مقادیری که به‌ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می‌شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به‌ازای آنها مخرج کسر صفر می‌شود؛ به‌عبارت دیگر این مقادیر را نمی‌توان به‌جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

**مثال :** عبارت گویای $\frac{۷x^۲+۱}{(x-۱)(x+۲)}$ به‌ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

**حل :** چه مقادیری مخرج کسر را صفر می‌کند؟

برای یافتن این عددها، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ یعنی :

$(x-۱)(x+۲)=۰$

از طرفی وقتی حاصل‌ضرب چند عبارت برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است؛ لذا :

$$\begin{cases}(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۱ \\ \text{یا} \\ (x+۲)=۰ \Rightarrow x=-۲\end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای فوق به ازای $x = ۱$ و $x = -۲$ تعریف نشده است.

## کار در کلاس

هر یک از عبارت‌های زیر به‌ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف) $\frac{۸x+۵}{۲}$ ب) $\frac{۷+x}{x}$ ج) $\frac{۲b+۱}{۲b-۱}$

د) $\frac{۳x}{x^۲+۴}$ هـ) $\frac{x}{x^۲-۱}$ و) $\frac{a+۵}{a^۲-۵a+۶}$

### ساده‌کردن یک عبارت گویا

کسر $\frac{۳۶}{۴۸}$ با کسرهای $\frac{۹}{۱۲}$، $\frac{۶}{۸}$، $\frac{۱۸}{۲۴}$ و $\frac{۳}{۴}$ مساوی است. بین این کسرها $\frac{۳}{۴}$ کسری است که دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع :

$$\frac{۳۶}{۴۸}=\frac{۳\times\cancel{۱۲}}{۴\times\cancel{۱۲}}=\frac{۳}{۴}$$

در ساده‌کردن هر عدد گویا می‌توان صورت و مخرج را به عددی غیرصفر تقسیم کرد؛ یعنی

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b} \quad (b\neq ۰ , c\neq ۰)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای $\frac{AC}{BC}$ داریم :

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$ (A و B و C چند جمله‌ای هستند و $C\neq ۰$ و $B\neq ۰$)

## فعالیت

هر یک از عبارت‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است، راه‌حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف) $\frac{۱۸y^۳}{۶۰y^۵}=\frac{۳}{۱۰y^۲}$

ب) $\frac{x^۲+۶x+۹}{x^۲+۴x+۳}=\frac{(x+۳)\cancel{(x+۳)}}{(x+۱)\cancel{(x+۳)}}=\frac{x+۳}{x+۱}$

ج) $\frac{y^{۲}-۹}{۳y+۹}=\frac{(y+۳)(y-۳)}{۳(y+۳)}=$ _____

د) $\frac{۸ab^{۷}}{۲۰a^{۲}b^{۳}}=\frac{۲b^{۴}}{\quad}$

هـ) $\frac{b-۵}{۵-b}=\frac{b-۵}{-(b-۵)}=-۱$

## کار در کلاس

۱ــ عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید :

الف) $\frac{m^{۲}-۱۶}{۴-m}$

ب) $\frac{۶m+۱۸}{۷m+۲۱}$

ج) $\frac{a^{۲}-۵a-۱۴}{a^{۲}+a-۲}$

د) $\frac{x^{۴}-y^{۴}}{y-x}$

۲ــ عبارت $\frac{a+ax}{a}$ به دو شکل ساده شده ؛ کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\frac{a+\cancel{a}x}{\cancel{a}}=a+x$

ب) $\frac{a+ax}{a}=\frac{a(۱+x)}{a}=۱+x$

## تمرین

۱ــ برای هر عبارت گویا، مقادیری را به‌دست آورید که عبارت به‌ازای آنها تعریف نشده است.

الف) $\frac{۵x}{۳ab^{۲}}$

ب) $\frac{۲y}{y(۲y-۶)}$

ج) $\frac{۲P}{P^{۲}-P-۱۲}$

د) $\frac{۲x+۵}{x}$

هـ) $\frac{x^{۲}-۱}{x+۵}$

۲ــ حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید :

الف) $\frac{۳-x}{x^{۲}-۵x+۶}$

ب) $\frac{۴x^{۲}+۸x}{۱۲x+۲۴}$

ج) $\frac{۲۴x^{۲}}{۱۲x^{۲}-۶x}$

د) $\frac{y^{۳}-۲y^{۲}-۳y}{y^{۲}+y}$

هـ) $\frac{۱-t^{۴}}{t^{۲}+۱}$

و) $\frac{۶a^{۴}b^{۲}}{۴ab^{۸}}$

۳ــ عبارت‌هایی را که حاصل آنها ۱ و یا ۱- است، معلوم کنید.

الف) $\frac{۲y+۳}{۲y-۳}$

ب) $\frac{۲y-۳}{۳-۲y}$

ج) $\frac{۲y+۳}{۳+۲y}$

د) $\frac{۲y+۳}{-۲y-۳}$

۴ــ هر یک از عبارت‌های داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

| | | |
|---|---|---|
| ۱) $\frac{a-۲}{a+۵}$ | ۲) $\frac{a+۲}{a+۵}$ | ۳) $\frac{۲-a}{a+۵}$ |
| ۴) $\frac{-a-۲}{-a-۵}$ | ۵) $\frac{a-۲}{-a-۵}$ | ۶) $\frac{۲-a}{-a-۵}$ |

۵ــ از عبارت‌های زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

الف) $\frac{z}{t}(x+y)$

ب) $\frac{zx+y}{t}$

ج) $\frac{۱}{t}\times z(x+y)$

د) $z\times\frac{x+y}{t}$

هـ) $\frac{zx}{t}+\frac{zy}{t}$

و) $\frac{zx}{t}+y$

۶ــ در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

الف) $\frac{۱-z}{z}=\frac{\square}{z(z^۲+۱)}$

ب) $\frac{۳x}{x-۳}=\frac{\square}{x^۲-x-۶}$

ج) $\frac{۳y+۲}{۵}=\frac{۱}{۵}(\square)$

د) $\frac{(x-۵)(\square)}{(x-۲)(x-۵)}=x+۱$